DISTRIBUSI BINOMIAL

CONTOH KASUS

- Seorang petugas ingin menghitung probabilitas untuk mendapatkan 4 bola lampu yang rusak dari suatu sampel acak sebanyak 20 bola lampu, apabila diketahui bahwa 10 % dari bola lampu tersebut rusak. Nilai probabilitas ini dapat diperoleh dari tabel binomial yang dibuat berdasarkan distribusi binomial.
- Seorang ahli farmasi ingin menguji efektivitas dari suatu jenis obat dalam mencegah jenis penyakit tertentu, sehingga dilakukan pengobatan terhadap 100 pasien. Hasil eksperimen dapat dianalisis dengan menggunakan distribusi binomial.

Pada umumnya suatu eksperimen dapat dikatakan eksperimen binomial apabila memenuhi syarat sbb:

- Banyaknya eksperimen merupakan bilangan tetap (*fixed number of trial*)

- Setiap eksperimen mempunyai 2 hasil yang dikategorikan menjadi “sukses” dan “gagal”. Dalam aplikasinya dikategorikan apa yang disebut sukses dan gagal, contoh:

  lulus (sukses), tidak lulus (gagal)

  senang (sukses), tidak senang (gagal)

  setuju (sukses), tidak setuju (gagal)

  puas (sukses), tidak puas (gagal)

  barang bagus (sukses), barang rusak (gagal)

- Probabilitas sukses nilainya sama pada setiap eksperimen.
- Eksperimen tersebut harus bebas (*independent*) satu sama lain, artinya hasil eksperimen yang satu tidak mempengaruhi hasil eksperimen lainnya.

CONTOH EKSPERIMEN

- Perhatikan suatu eksperimen Binomial yang terdiri dari pengambilan satu bola secara acak (random) dari kotak yang berisi 30 bola merah (=30 M) dan 70 bola putih (=70 P). Y adalah variabel acak dengan nilai sebagai berikut:

  Y = 1, jika bola merah yang terambil

  0, jika bola putih yang terambil

  P(M) = p = probabilitas untuk mendapat bola merah (sukses) = 0,3

  P(P) = 1 – p = q = probabilitas untuk mendapatkan bola putih (gagal) = 0,7

  $E(Y) = 1(p) + 0(1 - p)$

  $= 1(0,3) + 0(0,7)$

  $= 0,3$

Eksperimen binomial akan dilakukan dengan n = 4 kali. Pengambilan bola dilakukan dengan pengembalian bola yang terambil (*with replacement*). Hal ini untuk menjaga agar eksperimen yang satu tidak mempengaruhi hasil eksperimen lainnya. Eksperimen ini akan menghasilkan $2^4 = 16$ hasil sbb:

1. MMMM
2. MMMP
3. MMPM
4. MMPP
5. MPMM
6. MPMP
7. MPPM
8. MPPP
9. PMMM
10. PMMP
11. PMPM
12. PMPP
13. PPMM
14. PPMP
15. PPPM
16. PPPP

Masing-masing hasil eksperimen terdiri dari 4 kejadian yang bebas satu sama lain, sehingga probabilitas terjadinya setiap hasil eksperimen merupakan hasil kali probabilitas masing-masing kejadian, misal P(MMPM) = *ppqp* = (0,3)(0,3)(0,7)(0,3) = 0,0189.

P(3M dan 1P) = P(MMMP) + P(MMPM) + P(MPMM) + P(PMMM) = 0,0756

tanpa memperhatikan urutan dari masing-masing kejadian, setiap suku dalam penjumlahan tersebut mempunyai probabilitas sebesar $pppq = p^3q$.

dengan cara yang sederhana ini dapat dihitung pula probabilitas untuk mendapatkan sejumlah bola merah tertentu sebagai hasil eksperimen.

Cara lain:

Dengan distribusi binomial:

Apabila X = banyaknya bola merah dalam suatu hasil eksperimen binomial maka:

$$X = \sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{4} Y_i$$

Misal:

Untuk MMMP, maka X = Y1 + Y2 + Y3 + Y4 = 1 + 1 + 1 + 0 = 3

Untuk MPMP, maka X = Y1 + Y2 + Y3 + Y4 = 1 + 0 + 1 + 0 = 2

Dapat ditunjukkan bahwa apabila eksperimen dilakukan sebanyak 4 kali maka:

X = 0, 1, 2, 3, 4

Sedangkan untuk n kali

X = 0, 1, 2, 3, 4, …, n

Apabila semua nilai probabilitas X sebagai hasil suatu eksperimen dihitung, akan diperoleh distribusi probabilitas X dan disebut **distribusi probabilitas Binomial.**

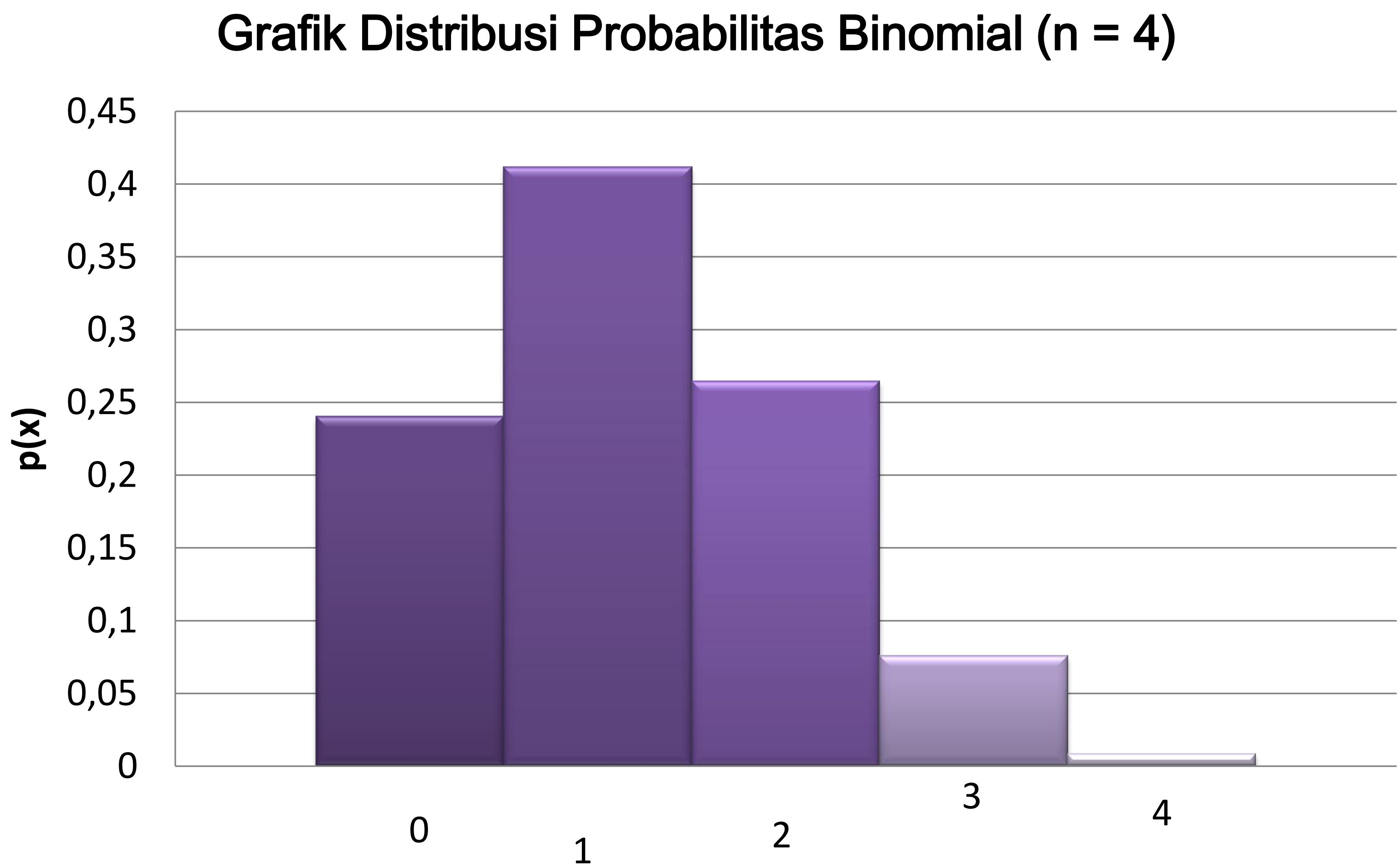
P(X = 0) = $P(PPPP) = P(P)P(P)P(P)P(P) = (0,7)^4 = 0,2401$

P(X = 4) = $P(MMMM) = P(M)P(M)P(M)P(M) = (0,3)^4 = 0,0081$

P(X = 3) = $p^3q + p^2qp + pqp^2 + qp^3 = 4(0,3)^3(0,7) = 0,0756$

TABEL DISTRIBUSI PROBABILITAS BINOMIAL (n=4)

X	P(x)
0	0,2401
1	0,4116
2	0,2646
3	0,0756
4	0,0081


Grafik Distribusi Probabilitas Binomial (n = 4)
p(x)
0,45
0,4
0,35
0,3
0,25
0,2
0,15
0,1
0,05
0
0
1
2
3
4

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa dalam distribusi probabilitas binomial dengan *n* percobaan berlaku rumus berikut:

P(x sukses, dalam n percobaan)= $p^x q^{n-x}$

1

Dimana:

x = 0, 1, 2, 3, …, n

p = probabilitas sukses

q = (1 – p) = probabilitas gagal

Aturan umum permutasi dapat digunakan untuk memperoleh banyaknya kemungkinan urutan yang berbeda, dimana masing-masing urutan terdapat x sukses, misalnya x = 3 (=3 sukses): MMMP, MMPM, MPMM, PMMM

Apabila suatu himpunan yang terdiri dari n elemen dibagi 2, yaitu x sukses dan (n – x) gagal, maka banyaknya permutasi dari n elemen yang diambil x setiap kali dapat dihitung berdasarkan rumus berikut:

$${}_{n}P_{(n,\, n-x)} = n!/(x!(n-x)!) = {}_{n}C_{x}$$

2

$\mathbf{{}_{n}C_{x} = n!/(x!(n-x)!)}$ disebut koefisien binomial (merupakan kombinasi dari n elemen yang diambil x setiap kali)

Masing-masing probabilitas pada distribusi binomial sbb:

$$\boldsymbol{p_r(x) = (n!/(x!(n-x)!))\, p^x q^{n-x}}$$

3

$X = 0, 1, 2, \ldots, n$; $n! = n(n-1)(n-2) \ldots. 1$

Ingat $0! = 1! = 1$, dan $p^0 = 1$

Dengan kata lain, probabilitas untuk memperoleh x sukses dalam eksperimen Binomial yang dilakukan sebanyak n kali sama dengan banyaknya kombinasi dari n elemen yang diambil x setiap kali, dikalikan dengan probabilitas untuk memperoleh "sukses" dipangkatkan x, p^x, dan kemudian dikalikan dengan probabilitas "gagal" dipangkatkan $(n - x)$, q^{n-x}.

$$\underbrace{\quad x \quad}_{\text{sukses}}\ \underbrace{\qquad (n-x) \qquad}_{\text{gagal}}$$

$P_r(x)$ merupakan salah satu suku dari ekspansi Binomial $(p+q)^n$

$$
\begin{aligned}
n &= 0,\ (p+q)^0 = 1 \\
n &= 1,\ (p+q)^1 = p+q \\
n &= 2,\ (p+q)^2 = p^2+2pq+q^2 \\
n &= 3,\ (p+q)^3 = p^3+3p^2q+3pq^2+q^3 \\
n &= 4,\ (p+q)^4 = p^4+4p^3q+6p^2q^2+4pq^3+q^4
\end{aligned}
$$

Pada umumnya mempunyai (n + 1) suku yaitu:

$$p^n,\ p^{n-1}q,\ p^{n-2}q^2,\ p^{n-3}q^3,\ \ldots,\ p^xq^{n-x},\ \ldots,\ pq^{n-1},\ q^n$$

Koefisien dari *p3q* (*MMMP, MMPM, MPMM, PMMM = 4*) dapat diperoleh dengan cara:

$_4C_3$ = 4!/3!(4-3)!

= (4.3.2.1)/(3.2.1.1)

= 4

Koefisien dari *p2q2* (*MMPP, MPMP, PMMP, MPPM, PPMM, PMPM = 6*) dapat diperoleh dengan cara :

$_4C_2$ = 4!/2!(4-2)!

= (4.3.2.1)/(.2.1.2.1)

= 6

Termasuk koefisien untuk setiap suku:

$$(p+q)^n = p^n + np^{n-1}q + \frac{n(n-1)}{2!}p^{n-2}q^2 + \ldots + \frac{n!}{x!(n-x)!}p^x q^{n-x} + npq^{n-1} + q^n$$

$p_r(x)$ dari rumus 3 merupakan fungsi probabilitas, karena

1. $p_r(x) \geq 0$ untuk semua x, sebab $n!/(x!(n-x)!) \geq 0$
2. $\sum p_r(x) = 1$ untuk semua x.

Ingat bahwa $p_r(x)$ merupakan salah satu suku dari $(p+q)^n$ karena $q = (1-p)$, maka

$$\begin{aligned}\sum p_r(x) &= (p+q)^n \\ &= [p+(1-p)]^n \\ &= 1^n \\ &= 1\end{aligned}$$

Contoh soal:

- Seorang penjual bohlam lampu mengatakan bahwa di antara seluruh barang dagangannya yang dibungkus rapi ada yang rusak sebanyak 20%. Seorang pelanggan membeli barang tersebut sebanyak 8 buah dan dipilih secara acak. Jika X = banyaknya barang tidak rusak (bagus) maka:

a. Hitung semua probabilitas untuk memperoleh X.
b. Buat probabilitas kumulatif.
c. Berapa probabilitasnya bahwa dari 8 buah barang yang dibeli ada 5 yang rusak?
d. $P(X \leq 5)$, $P(2 \leq X < 5)$, $P(X \leq 8)$, $P(X \geq 4)$

- Jawab:

Hasil perhitungan untuk menjawab poin a dan b langsung dimasukkan ke dalam tabel.

Misal: $p_r(3) = P(X=3)$

$= (8!/(3!(8-3)!))\ (0,8)^3(0,2)^5$

$= (8.7.6.5.4.3.2.1/3.2.1.5.4.3.2.1)(0,8)^3(0,2)^5$

$= 56\ (0,8)^3(0,2)^5$

$= 0,009175 \approx 0,0092$ (probabilitas untuk memperoleh 3 buah bohlam lampu yang bagus)

$p_r(6) = P(X=6)$

$= (8!/(6!(8-6)!))\ (0,8)^6(0,2)^2$

$= (8.7.6.5.4.3.2.1/6.5.4.3.2.1.2.1)\ (0,8)^6(0,2)^2$

$= 28\ (0,8)^6(0,2)^2$

$= 0,2936$ (probabilitas untuk memperoleh 3 buah bohlam lampu yang bagus)

x	n – x	$p_r(x)$	$F(x) = P(X \leq x)$
0	8	$1(0,8)^0(0,2)^8 = 0,0000$	0,0000
1	7	$8(0,8)^1(0,2)^7 = 0,0001$	0,0001
2	6	$28(0,8)^2(0,2)^6 = 0,0011$	0,0012
3	5	$56(0,8)^3(0,2)^5 = 0,0092$	0,0104
4	4	$70(0,8)^4(0,2)^4 = 0,0459$	0,0563
5	3	$56(0,8)^5(0,2)^3 = 0,1468$	0,2031
6	2	$28(0,8)^6(0,2)^2 = 0,2936$	0,4967
7	1	$8(0,8)^7(0,2)^1 = 0,3355$	0,8322
8	0	$1(0,8)^8(0,2)^0 = 0,1678$	1,0000

c. 5 rusak, berarti X = 3

jadi:

$p_r(3) = P(X=3)$

$= (8!/(3!(8-3)!))\ (0,8)^3(0,2)^5$

$= (8.7.6.5.4.3.2.1/3.2.1.5.4.3.2.1)(0,8)^3(0,2)^5$

$= 56\ (0,8)^3(0,2)^5$

$= 0,009175 \approx 0,0092$

d. $P(2 \leq X < 5) = p_r(2) + p_r(3) + p_r(4)$

$= 0,0011 + 0,0092 + 0,0459$

$= 0,0562$ (probabilitas untuk mendapatkan 2 bohlam lampu bagus atau lebih tetapi lebih kecil dari 5)

- Dalam tabel tersebut, $n = 16$ dan $p =$ (0,05), (0,10), (0,15), …, (0,50). Apabila $p >$ 0,50, maka persoalan harus dibalik, yaitu menjadi x gagal dan $(n – x)$ sukses. Dengan demikian peranan *p* bukan lagi menjadi probabilitas sukses melainkan probabilitas gagal.